REDES DE PETRI: PROPIEDADES Y MÉTODOS DE ANÁLISIS

PROGRAMACIÓN CONCURRENTE

MASTER EN COMPUTACIÓN

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y COMPUTADORES

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

CURSO 2012/13

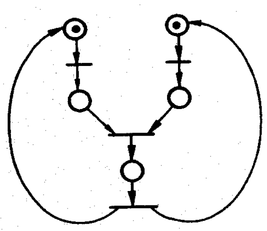
REDES DE PETRI: PROPIEDADES

Las propiedades de las redes de Petri nos permiten detectar fenómenos de interés o errores de funcionamiento en el sistema que modelan.

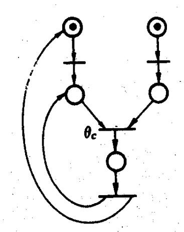
- Vivacidad
- Ciclicidad
- Limitación
- Conservación
- Conflictividad
- Exclusión mutua

PROPIEDADES DE LAS REDES DE PETRI: VIVACIDAD

- Una transición t de una RdP marcada es **viva** si para cada marcado M_i existe un marcado alcanzable desde M_i en el cual t está habilitada.
- Una RdP marcada es **viva** si cada una de sus transiciones es viva.
- Una RdP es **no viva** para un marcado M_i si, para algún marcado M_j sucesor de M_i, todas las transiciones son no vivas.



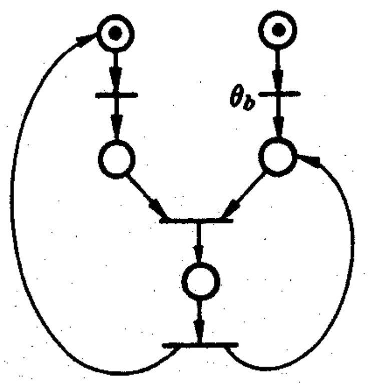
RdP viva



RdP no viva (se bloquea totalmente)

PROPIEDADES DE LAS REDES DE PETRI: VIVACIDAD

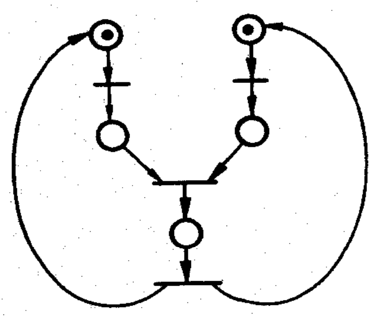
- Una RdP es **parcialmente viva** si contiene si contiene transiciones que siempre son vivas y otras que no lo son.
- En una RdP **viva** se garantiza una operación libre de puntos muertos independientemente de la secuencia de disparo elegida. La propiedad de **vivacidad** es muy importante porque sirve para caracterizar el **bloqueo** total o parcial de un sistema.



RdP parcialmente viva

PROPIEDADES DE LAS REDES DE PETRI: CICLICIDAD

- Una RdP para un marcado inicial M_0 se dice que posee un **comportamiento globalmente cíclico**, si existe una secuencia de disparos que permite alcanzar el marcado inicial M_0 a partir de cualquier marcado M_i sucesor de M_0.
- La ciclicidad de una RdP para un marcado M_0 garantiza la no existencia de subconjuntos de estados finales; esto es, de conjuntos de estados a partir de los cuales no son alcanzables algunos otros estados sucesores de M_0.

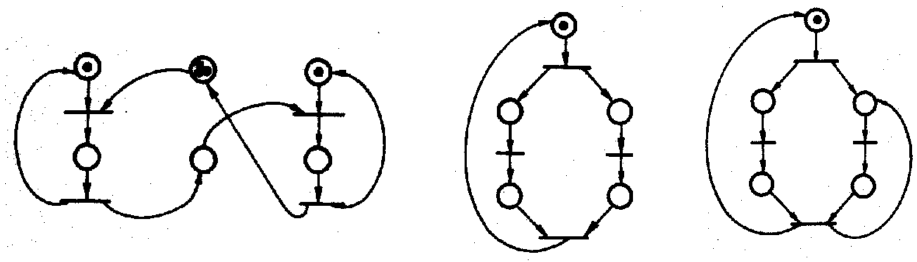


RdP cíclica

PROPIEDADES DE LAS REDES DE PETRI: LIMITACIÓN

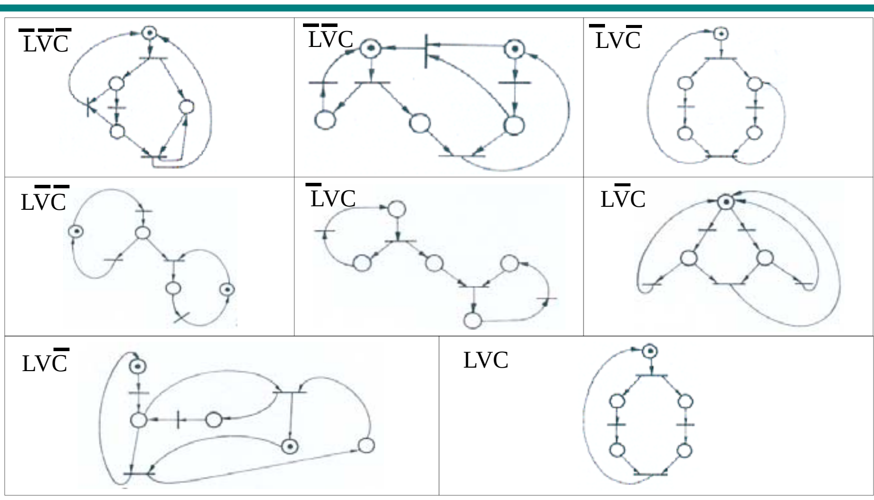
- Una plaza p de una RdP marcada es **k-limitada** para un marcado M_0 si, para cualquier marcado Mi sucesor de M_0, el número de marcas en p es menor o igual que k. Esto es, si y sólo si existe un k fijo tal que $M_i(p) \leq k$ para todo marcado alcanzable desde M_0.
- Se denomina **limite de la plaza** p al menor entero k que verifica la desigualdad anterior.
- Una RdP marcada es **k-limitada** para un marcado M_0 si, para algún k fijo, cada plaza es k-limitada.
- Una plaza es **segura** si es 1-limitada.
- Una RdP marcada es **segura** o **binaria** si cada una de sus plazas es segura.
- El interés de la k-limitación de una red es que garantiza la finitud de sus marcados alcanzables. Desde un punto de vista práctico, una red k-limitada puede implementarse con un conjunto de recursos finitos.

PROPIEDADES DE LAS REDES DE PETRI: LIMITACIÓN



RdP 3-limitada　　RdP binaria　　RdP no limitada

LAS PROPIEDADES DE VIVACIDAD, CICLICIDAD Y LIMITACIÓN SON INDEPENDIENTES



PROPIEDADES DE LAS REDES DE PETRI: CONSERVACIÓN

- Una RdP con un marcado inicial M_0 se dice que es **conservativa** si, para cualquier marcado M_i alcanzable desde M_0, el número total de marcas en la RdP es el mismo; esto es, si para todo marcado se verifica

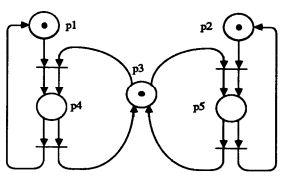
$$\sum_{p_i \in P} M(p_i) = \sum_{p_i \in P} M_0(p_i)$$

- El concepto de conservación está relacionado con el número de recursos disponibles, que no puede variar durante la ejecución de la red de Petri. La manera más simple de conseguirlo es requerir que el número total de testigos en la red permanezca constante. Sin embargo, la conservación estricta es una relación muy fuerte y normalmente conviene hablar de conservación con respecto a un vector peso.

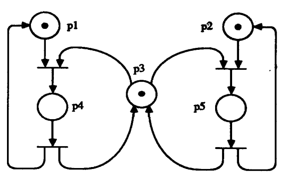
PROPIEDADES DE LAS REDES DE PETRI: CONSERVACIÓN

Una RdP con un marcado inicial M_0 se dice que es **conservativa respecto a un vector peso** w, $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$, $w_i \geq 0$, si para cualquier marcado M alcanzable desde M_0, la suma del producto del número de marcas de cada lugar por el factor de peso correspondiente es constante; esto es, si para todo marcado $M \in R(M_0)$ se verifica:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \bullet M(p_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \bullet M_0(p_i)$$



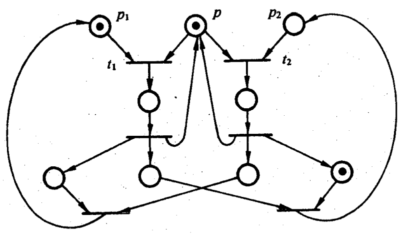
RdP conservativa estricta



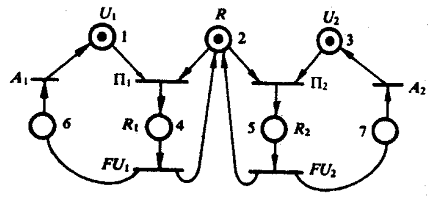
RdP conservativa con peso w=(1,1,1,2,2)

PROPIEDADES DE LAS REDES DE PETRI: CONFLICTIVIDAD

- Se dice que en una RdP existe un **conflicto estructural** cuando un lugar posee más de una transición de salida.
- Se dice que dos transiciones t_i y t_j están en **conflicto efectivo** para M_0 si:
  - Existe un marcado alcanzable desde M_0 que sensibiliza simultáneamente a t_i y t_j.
  - Si al dispararse t_i (t_j) el marcado que se obtiene no habilita a t_j (t_i).



RdP con conflicto estructural



RdP con conflicto efectivo

PROPIEDADES DE LAS REDES DE PETRI: CONFLICTIVIDAD

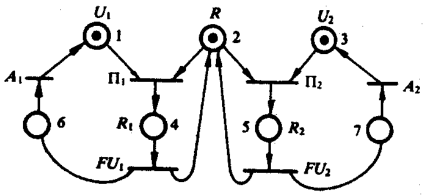
- En general, un conjunto de transiciones $T_ç \subset T$ se dice que están **en conflicto** si el disparo de cualquier subconjunto de transiciones $\{t_i\} \subset T_c$ da como resultado un marcado en el cual alguna transición $t_j \subset T_c$ se deshabilita.
- Se dice que una red de Petri es **persistente** si no existe un conjunto de transiciones que estén en conflicto para ningún marcado M del conjunto de alcanzabilidad.
- La situación de conflicto efectivo es normalmente inaceptable para cualquier descripción de un sistema, dado que corresponde a una situación ambigua. El conflicto efectivo se resuelve mediante una interpretación asociada a la red.

PROPIEDADES DE LAS REDES DE PETRI: EXCLUSIÓN MUTUA

- Un conjunto de transiciones $T_e \subset T$ se dice que son **mutuamente exclusivas** si el disparo de cualquier transición $t_i \subset T_e$ genera un marcado en el cual todas las demás transiciones $t_j \subset T_e$, $i \neq j$, se deshabilitan.
- Se dice que dos plazas de una red de Petri están en **exclusión mutua** para un marcado M_0 si no pueden estar marcadas simultáneamente en los marcados alcanzables a partir de M_0.
- Una aplicación típica de plazas con exclusión mutua es el modelado de recursos compartidos por múltiples usuarios.

Las plazas 4 y 5 y las transiciones Π_1 y Π_2 son mutuamente exclusivas.

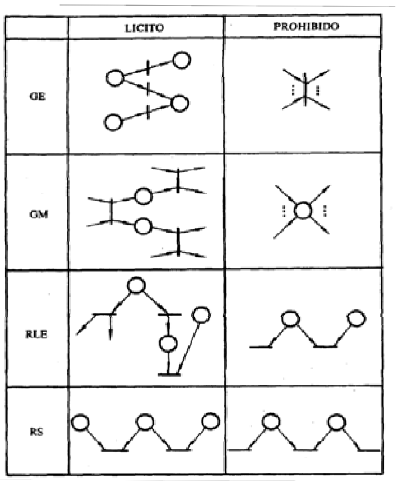
- R recurso disponible
- R_1 recurso tomado por Π_1
- R_2 recurso tomado por Π_2



REDES DE PETRI: SUBCLASES

- Las redes de Petri, a pesar de basarse en unas reglas bastante simples, pueden exhibir comportamientos muy complicados. Como consecuencia, se han introducido clases restringidas de redes de Petri, que son más fáciles de analizar, y se han estudiado sus propiedades.
- El objetivo que se persigue al definir una subclase de red de Petri es que pueda modelar una gran variedad de sistemas y que, al menos para los problemas de interés, se puedan utilizar procedimientos de análisis simples.
- Las principales subclases de redes de Petri ordinarias son:
  - **Grafos de estados (GE) o máquinas de estados (ME)** son RdP en las que cada transición ha de tener exactamente una entrada y una salida. Una máquina de estados es estrictamente conservativa, muy sencilla de analizar, puede representar conflictos o alternativas, pero no paralelismo, concurrencia ni sincronización.
  - **Grafo marcado (GM) o grafo de sincronización** es una RdP en la que cada plaza tiene exactamente una entrada y una salida. Los grafos marcados pueden representar paralelismo, concurrencia y sincronización, pero no conflicto o decisiones dependientes de datos.
  - **Red de libre elección (RLE)** es aquella en la que cada plaza p es o bien la única plaza de entrada de una transición o hay como mucho una transición que tiene p como una plaza de entrada. Esta subclase permite el modelado de concurrencia y conflicto, pero de una manera más restringida que en el modelo general. En una RLE, siempre que un lugar esté marcado y posea más de una transición de salida, es posible elegir libremente (independientemente del resto del marcado) la transición que se disparará.
  - **Red de Petri simple (RS)** es aquella en la que cada transición tiene como máximo una plaza de entrada compartida con otra transición.

SUBCLASES DE REDES DE PETRI ORDINARIAS



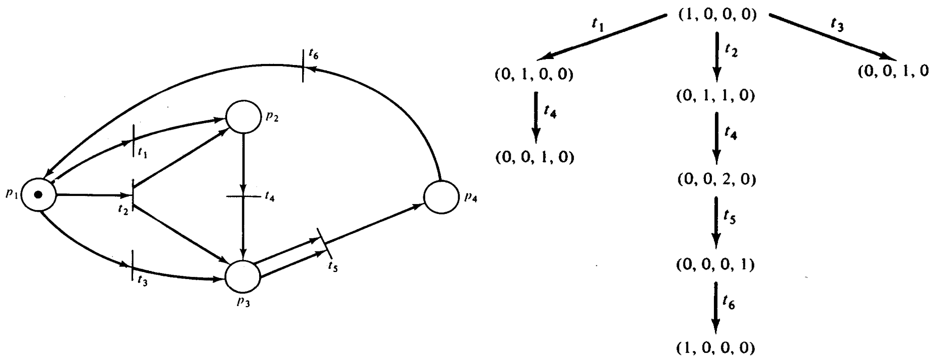
REDES DE PETRI: MÉTODOS DE ANÁLISIS

- Las redes de Petri tienen una gran potencia de modelado pero, además, es necesario **analizar** el sistema modelado para obtener datos sobre su comportamiento. Analizando el árbol de alcanzabilidad, es posible detectar los problemas de control que pueden presentarse durante la operación del sistema modelado, tales como los siguientes:
  - Bloqueos del sistema.
  - Existencia de partes del sistema que nunca entran en funcionamiento.
  - Existencia de plazas no seguras.
  - Existencia de estados absorbentes
  - Existencia de ciclos sin fin.
  - Finitud del espacio de estados.
  - Ausencia de conflictos
  - Verificación de especificaciones
  - …
- Las principales técnicas de análisis de RdP son:
  - Las basadas en el árbol de alcanzabilidad
  - Las basadas en las ecuaciones matriciales o de estado.

ANÁLISIS A PARTIR DEL ÁRBOL DE ALCANZABILIDAD

- El método más general para analizar el conjunto de los marcados alcanzables en una RdP desde un marcado inicial M_0 es construir su **árbol de alcanzabilidad**, que representa el conjunto de alcanzabilidad, R(M), de la red.
- De la definición de árbol de alcanzabilidad, se puede establecer que:
  - Una plaza p_i es **limitada** si y sólo si el árbol de alcanzabilidad no contiene ningún marcado con m_i=w.
  - Una red de Petri es **limitada** si en el árbol de alcanzabilidad no aparece ninguna w.
  - Una red de Petri es **segura** o **binaria** si en los marcados del árbol de alcanzabilidad sólo aparecen 0 y 1.

ANÁLISIS A PARTIR DEL ÁRBOL DE ALCANZABILIDAD: EJEMPLO 1



Árbol de alcanzabilidad de una red de Petri limitada

ANÁLISIS A PARTIR DEL ÁRBOL DE ALCANZABILIDAD

Verificar si una RP es **conservativa** es fácil:

1) Si existe alguna w, la red de Petri sólo puede ser conservativa si el peso correspondiente a la plaza en que aparece w es 0.

2) Si no existe ninguna w, el sistema tiene un número finito de estados y la conservación se puede verificar directamente sobre el árbol de alcanzabilidad.

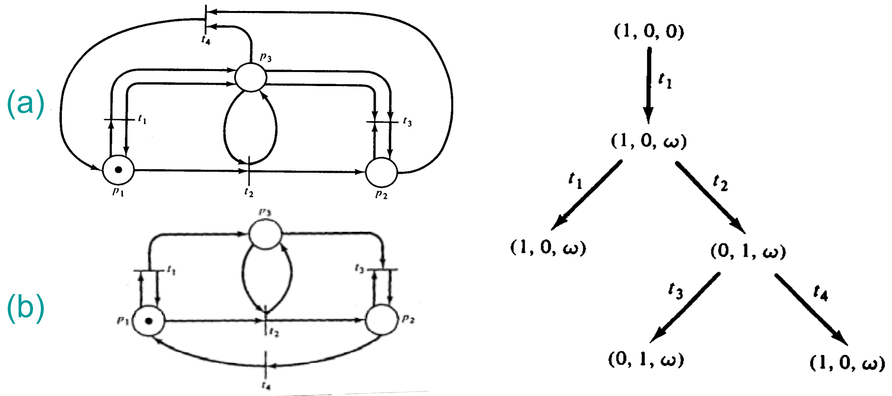
ANÁLISIS A PARTIR DEL ÁRBOL DE ALCANZABILIDAD

La presencia de las w supone una pérdida de información y, en algunas situaciones, presenta problemas:

1) Si hay w, no siempre está bien definida la secuencia de disparos que permite alcanzar un marcado presente en el árbol.

2) Con la presencia de w, es difícil deducir la existencia de estados muertos (ver ejemplo 4).

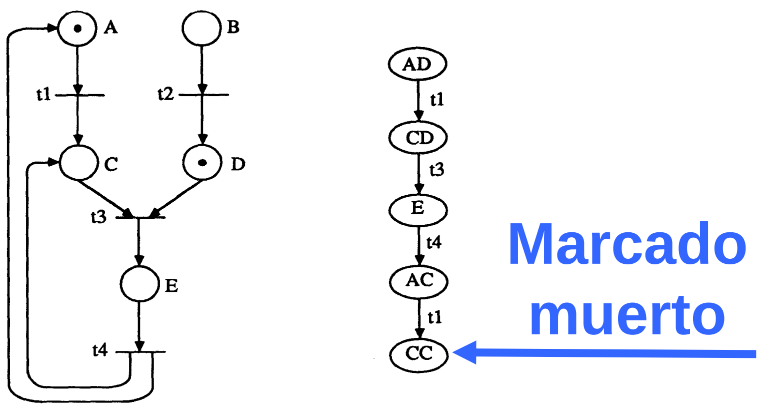
ANÁLISIS A PARTIR DEL ÁRBOL DE ALCANZABILIDAD: EJEMPLO 4



Ambas RdP tienen el mismo árbol de alcanzabilidad. Sin embargo, la (a) tiene estados muertos (por ejemplo, tras la secuencia t1-t2-t3), mientras que la (b) es una RP viva.

ANÁLISIS A PARTIR DEL ÁRBOL DE ALCANZABILIDAD: EJEMPLO 5

RED DE PETRI CON BLOQUEO



ANÁLISIS A PARTIR DEL ÁRBOL DE ALCANZABILIDAD

- Analizando el árbol de alcanzabilidad se puede obtener una información detallada del comportamiento del sistema modelado.
- El análisis del árbol de alcanzabilidad se puede utilizar para determinar si la red de Petri es una representación válida del sistema modelado, para verificar la corrección de un diseño, para elegir la mejor entre varias propuestas o para predecir el comportamiento del sistema.
- La principal desventaja es que el árbol de alcanzabilidad puede hacerse **complejo, grande e inmanejable**.

ANÁLISIS MATRICIAL DE UNA RED DE PETRI

- Una red de Petri con n plazas y m transiciones se representa por dos **matrices de incidencia** de dimensión m×n que representan las conexiones entre los nudos de la red:
  - La **matriz de incidencia previa**, C^-:

$$C^-(j,i)=I(p_i, t_j)$$

  - La **matriz de incidencia posterior**, C^+:

$$C^+(j,i)=O(p_i, t_j)$$

- Se define la **matriz de incidencia**, C, como $C= C^+ - C^-$.
- Una transición t_j se define por un vector e_j de dimensión m (número de transiciones) de componentes:

$$e_j(i)=\begin{cases}1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j\end{cases}$$

ANÁLISIS MATRICIAL DE UNA RED DE PETRI

La teoría matricial proporciona herramientas para analizar las propiedades y el comportamiento dinámico de las redes de Petri. Consideremos los siguientes casos:

1) Una transición tj está habilitada en un marcado M si

$$M \geq e_j \cdot C^-$$

2) El resultado del disparo de la transición t_j a partir del estado M, si está habilitada, es:

$$M' = M + e_j \cdot C$$

3) Para demostrar si una red de Petri es conservativa o no, es necesario encontrar un vector peso w (no nulo) para el cual la suma con peso de todos los marcados alcanzables sea constante. El vector w es la solución de la ecuación:

$$C \times w = 0$$

La existencia de un vector w que sea solución de esta ecuación proporciona una prueba simple para saber si la red es conservativa y, además, da como resultado el vector peso w.

ANÁLISIS MATRICIAL DE UNA RED DE PETRI

4) El **problema de alcanzabilidad** se resuelve también de manera sencilla.

El resultado de aplicar una secuencia de disparo de transiciones $\sigma = t_{j1}t_{j2}\ldots t_{jk}$ se puede representar como:

$$\delta(M, \sigma) = \delta(M, t_{j1}t_{j2}\ldots t_{jk}) = M + e_{j1} \cdot C + e_{j2} \cdot C + \ldots + e_{jk} \cdot C =$$
$$= M + (e_{j1} + e_{j2} + \ldots + e_{jk}) \cdot C = M + f(\sigma) \cdot C$$

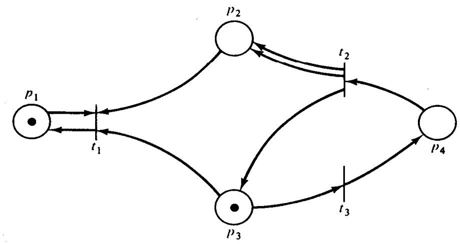
El vector $f(\sigma) = e_{j1} + e_{j2} + \ldots + e_{jk}$ se denomina **vector de disparo** de la secuencia $t_{j1}t_{j2}\ldots t_{jk}$. La i-ésima componente de $f(\sigma)$ es el número de veces que la transición t_i se dispara en la secuencia $t_{j1}t_{j2}\ldots t_{jk}$. El vector de disparo es, por tanto, un vector de enteros no negativos.

Por tanto, si M' es un marcado alcanzable desde M, es porque existe una secuencia de disparo de transiciones σ que conduce de M a M'. Esto significa que debe existir una solución $y = f(\sigma)$ de componentes enteras no nulas para x en la ecuación matricial

$$M' = M + y \cdot C$$

Si existe esta solución para y, M' es alcanzable desde M. En caso contrario, no lo es.

ANÁLISIS MATRICIAL DE UNA RED DE PETRI: EJEMPLO



$$C^- = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de incidencia previa — Matriz de incidencia posterior — Matriz de incidencia

ANÁLISIS MATRICIAL DE UNA RED DE PETRI: EJEMPLO

- Con un marcado inicial M = (1 0 1 0), la transición t_3 esta habilitada puesto que se verifica $M \geq e_j \bullet C^-$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- El disparo de la transición t_3 da lugar a un marcado $M' = M + e_j \bullet C$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ANÁLISIS MATRICIAL DE UNA RED DE PETRI: EJEMPLO

- La secuencia de disparo σ=t3-t2-t3-t2-t1 se representa por el vector de disparo f(σ)=(1 2 2) y genera, a partir del estado inicial, el marcado M'=M +f(σ) • C

$$M' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- Para determinar si el estado (1 8 0 1) es alcanzable desde el estado inicial (1 0 1 0), se resuelve la ecuación M'=M +f(σ) • C

$$\begin{pmatrix}1 & 8 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix}0 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

que corresponde a la secuencia σ=t3-t2-t3-t2-t3-t2-t3-t2-t3.

ANÁLISIS MATRICIAL DE UNA RED DE PETRI: EJEMPLO

- Se puede demostrar también que el marcado (1 7 0 1) no es alcanzable desde el marcado (1 0 1 0), puesto que la ecuación matricial M'=M +f(σ) • C no tiene solución.

$$\begin{pmatrix}1 & 7 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \quad \text{NO TIENE SOLUCIÓN}$$

ANÁLISIS MATRICIAL DE UNA RED DE PETRI

El análisis de las redes de Petri mediante técnicas matriciales es muy prometedor, pero presenta también severos **problemas**. Veamos algunos de ellos:

- La matriz C, por sí sola, no refleja totalmente la estructura de la red. Por ejemplo, las transiciones que tienen arcos de entrada y de salida hacia una misma plaza (autobucles), se representan en la misma posición en las matrices C^+ y C^- y se cancelan en la matriz C. Esto ocurre en el ejemplo previo con t_1 y p_1.
- El vector de disparo no da información sobre el orden en que se lleva a cabo el disparo de las transiciones. Sólo informa de qué transiciones se disparan y cuántas veces. Además, el que exista solución para la ecuación $M' = M + f(\sigma) \bullet C$ es una condición necesaria, pero no suficiente, para que el marcado sea alcanzable; puede ocurrir que la solución encontrada no se corresponda con ninguna secuencia de disparos permitida.